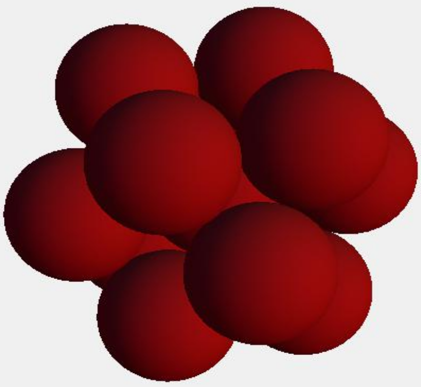
MathCon
The Mathematics Firm

Potencias y Radicales

Potencias y Radicales



Capítulo 1

Potencias

1.1. Reglas de los números reales

Propiedades de grupo abeliano de los $\mathbb{R}$ con la suma $(\mathbb{R}, +)$.

1. Para todo reales a, b, entonces $a + b \in \mathbb{R}$, (cerradura).
2. Pata todo reales a, b, entonces $a + b = b + a$, (conmutatividad).
3. Para todo reales a, b, c, tenemos que $a + (b + c) = (a + b) + c$, (asociatividad).
4. Existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$, llamado cero, tal que $a + 0 = 0 + a = a$, $\bigvee a \in \mathbb{R}$, (existencia del neutro aditivo).
5. Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe un real llamado inverso aditivo $(-a)$, tal que $a+(-a) = 0$, (existencia del inverso aditivo).

Propiedades de grupo abeliano de los $\mathbb{R}$ con el producto $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

1. Para todo reales a, b, entonces $a \cdot b \in \mathbb{R}$, (cerradura).
2. Pata todo reales a, b, entonces $a \cdot b = b \cdot a$, (conmutatividad).
3. Para todo reales a, b, c, tenemos que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, (asociatividad).
4. Existe un elemento $1 \in \mathbb{R}$, llamado uno, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $\bigvee a \in \mathbb{R}$, (existencia del neutro multiplicativo).
5. Para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, existe un real llamado inverso multiplicativo (a^{-1}), tal que $a \cdot (a^{-1}) = 1$, (existencia del inverso multiplicativo).

Propiedades distributiva de la suma respecto al producto en los $\mathbb{R}$.

1. Para todo reales a, b, c, tenemos que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, (distributividad).

1.2. Reglas de potencias de reales

Definición 1 *Sea $a \in \mathbb{R}$ y n un entero positivo, entonces:*

1. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$.

2. $a^0 = 1$.

3. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ *con* $a \neq 0$.

Las siguientes propiedades se cumplen para $a \in \mathbb{R}$

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
2. $(a^n)^m = a^{nm}$.
3. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
4. $(ab)^n = a^n b^n$.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

1.3. Ejercicios

Aplicando las propiedades de potencias y de números reales obtener el valor numerico de:

1.

$$\begin{aligned} 2^2 \cdot 2^5 &= 2^{2+5} \\ &= 2^7 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 3^3 \cdot 3^2 \cdot 3 &= 3^{3+2+1} \\ &= 3^6 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (3^3)^2 &= 3^{3\cdot 2} \\ &= 3^6 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (3^3 \cdot 3^4)^3 &= (3^{3+4})^3 \\ &= (3^7)^3 \\ &= 3^{21} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \frac{3^4}{3^3} &= 3^{4-3} \\ &= 3^1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2^3}{2^5}\right)\left(\frac{2^7}{2^2}\right) &= \left(\frac{1}{2^2}\right)\left(\frac{2^5}{1}\right)\\ &= \left(\frac{2^5}{2^2}\right)\\ &= 2^{5-2}\\ &= 2^3\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2^3}{2^5}\right)\left(\frac{2^7}{2^2}\right) &= \left(\frac{2^3}{1}\right)\left(\frac{2^7}{2^7}\right)\\ &= 2^3\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}\left(\frac{3^3}{3^5}\right)^3\left(\frac{3^2}{3^3}\right)^2 &= \left(\frac{3^9}{3^{15}}\right)\left(\frac{3^4}{3^6}\right)\\ &= \left(\frac{1}{3^6}\right)\left(\frac{1}{3^2}\right)\\ &= \left(\frac{1}{3^8}\right)\\ &= 3^{-8}\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\left(\frac{3^3}{3^5}\right)^3\left(\frac{3^2}{3^3}\right)^2 &= \left(\frac{1}{3^2}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\\ &= \left(\frac{1}{3^6}\right)\left(\frac{1}{3^2}\right)\\ &= \left(\frac{1}{3^8}\right)\\ &= 3^{-8}\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}\left(\frac{3^3}{3^5}\right)^3\left(\frac{3^2}{3^3}\right)^2 &= 3^{9+4-15-6}\\ &= 3^{-8}\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2^2 3^3}{3^4}\right)^2\left(\frac{2^2 3^4}{2^5 3^2}\right)^3\left(\frac{6}{12}\right)^2 &= \left(\frac{2^2}{3}\right)^2\left(\frac{3^2}{2^3}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\\ &= 2^{4-9-2}3^{-2+6}\\ &= 2^{-7}3^4\end{aligned}$$

Capítulo 2

Radicales

Las siguientes propiedades se cumplen para $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $n, k \in \mathbb{Z}$

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.
3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
4. $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}}$.
5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

2.1. Ejercicios

Aplicando las propiedades de radicales y los números reales realizar las siguientes operaciones:

1. Sacar números enteros del signo de raíz de la siguente expresión:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{320} &= \sqrt[3]{2^6 5} \\
&= \sqrt[3]{2^6}\,\sqrt[3]{5} \\
&= 2^{\frac{6}{3}}\,\sqrt[3]{5} \\
&= 2^2\,\sqrt[3]{5} \\
&= 4\sqrt[3]{5}
\end{aligned}$$

2. Sacar números enteros del signo de raíz de la siguente expresión:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{-125} &= \sqrt[3]{-5^3} \\
&= -5^{\frac{3}{3}} \\
&= -5
\end{aligned}$$

3. Sacar números enteros del signo de raíz de la siguente expresión:

$$\begin{aligned}
\sqrt{245} &= \sqrt{5 \cdot 7^2} \\
&= 7\sqrt{5}
\end{aligned}$$

4. Sacar números enteros del signo de raíz de la siguente expresión:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{80} &= \sqrt[4]{5\cdot 2^4}\\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

5. Sacar números enteros del signo de raíz de la siguente expresión:

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{12500} &= \sqrt[5]{4\cdot 5^5}\\ &= 5\sqrt[5]{4}\end{aligned}$$

6. Escribir como potencias :

$$\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$$

7. Escribir como potencias :

$$\sqrt{2^{-3}} = 2^{-\frac{3}{2}}$$

8. Escribir como potencias :

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{7^{-4}} &= 7^{-\frac{4}{6}}\\ &= 7^{-\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

9. Escribir usando el signo de raíz :

$$7^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{7^3}$$

10. Escribir usando el signo de raíz :

$$(7{,}5)^{0{,}25} = \left(\frac{15}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

11. Encontrar el valor numérico de la siguiente expresión :

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}}:\sqrt{\sqrt[4]{5}}\right)^2 &= (5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\cdot\left((5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}:(5^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}\right)^2\\ &= 5^{\frac{1}{4}}\cdot\left(5^{\frac{1}{6}}:5^{\frac{1}{8}}\right)^2\\ &= 5^{\frac{1}{4}}\cdot\left(5^{\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}\right)^2\\ &= 5^{\frac{1}{4}}\cdot\left(5^{\frac{1}{24}}\right)^2\\ &= 5^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{12}}\\ &= 5^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}\\ &= 5^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$